Numerické výpočty ve světovém geodetickém referenčním systému 1984 (WGS84)

prof. Maria Ivanovna Jurkina, DrSc.
CNIIGAiK, Moskva

prof. Ing. Miloš Pick, DrSc.
Geofyzikální ústav ČAV, Praha

Vojenský geografický obzor, 2006, č. 1

Příloha 2

OBSAH

SEZNAM TABULEK

Úvod

V současné době přecházíme na nový světový geodetický referenční systém 1984 (World Geodetic System 1984, WGS84). Starší generace byla zvyklá používat klasická zobrazení, ať již šlo o Křováka, či o Gausse-Krügera (dnes se tomu říká Universal Transversal Mercator (UTM)[1]. Pro starší generaci geodetů to přináší zcela nový pohled na základy geodézie. Systém WGS84 není definován po staru geometricky, ale fyzikálně. Jako normální zemské těleso byl podle Pizzettiho zvolen hladinový rotační elipsoid, jehož základní parametry, velikost, tvar, hmotnost a rychlost rotace, byly odvozeny z pozorování, zejména pak z pozorování družic. To ovšem přináší proti klasickému pojetí geodézie řadu novinek. Dnes prakticky všechny úlohy vyšší geodézie vedou na řešení okrajových úloh z teorie tíhového potenciálu. Geodeti si tedy musili doplnit matematické vzdělání o partie, které se na vysokých školách v dobách ne příliš vzdálených nepřednášely. Kromě okrajových úloh šlo i o funkce, které řešení umožňovaly: Asi od šedesátých let minulého století jsme se museli naučit používat kulové funkce. Nedávno pak funkce hyperbolické a hyperbolometrické (ty byly implementovány na stolní počítače teprve asi před pěti lety). Na rozdíl od vzorců klasické geodézie přinášejí dnes používané rovnice vyšší geodézie jak členy s geometrickými prvky, tak členy s prvky fyzikálními. Pro starší generaci geodetů jsou tyto výrazy téměř nesrozumitelné; na rovnice nového typu pohlížejí s obavami, zda něco takového lze vůbec numericky počítat.
V našem příspěvku se pokusíme o propočet příkladu v novém systému WGS84. Ke sledování budeme potřebovat stolní počítač se systémem Windows verze 98 nebo vyšší a s odpovídající verzí programu Excel.

1. Světový geodetický referenční systém 1984 (WGS84)

Pizzetti [1] ukázal, že známe-li čtyři základní parametry referenčního elipsoidu, můžeme z nich odvodit vše potřebné: tíhový potenciál a složky tíhového pole, jakož i odvozené parametry.
Volba čtyř základních parametrů závisí spíše na praktických podmínkách než teoretických. Tato volba se párkrát měnila a dnes se používají tyto základní parametry (tab. 1):

1. Parametr definující rozměr referenčního elipsoidu. Dnes to je velká **poloosa referenčního elipsoidu** a. Jde o poslední geometrický parametr. Již delší dobu se předpokládá, že bude nahrazen jiným prvkem, prvkem fyzikálním, totiž hodnotou tíhového potenciálu W_0 na referenčním elipsoidu. Důvodů je více, především však to, že hodnotu W_0 lze odvozovat přímo z družicových měření a lze ji v přírodě realizovat, což u hodnoty a nejde.

2. Parametr mající vztah ke tvaru referenční plochy. Dnes je to **převrácená hodnota zploštění referenčního elipsoidu** $1/f$. Tento parametr byl zvolen nedávno. Předtím se používal jiný prvek, např. čtverec prvé excentricity e^2, dynamický tvarový faktor J_2 nebo gravitační koeficient druhého stupně $\overline{C'_{2,0}}$.

3. Parametr definující **rychlost rotace zemského tělesa** ω.

[1] Jak je vidět, angličtina vládne všude. Ještě před pár lety se říkalo, že naši reformátoři nosí beranici, když v Moskvě mrzne, dnes je všechno jinak. Zdá se, že v některých našich geodetických institucích zaměstnávají meteorologa, aby včas věděli, jak fouká vítr.

4. Parametr definující **hmotnost referenčního tělesa** M a **gravitační konstantu** G, což je **geocentrická gravitační konstanta** GM.

Tabulka 1 Základní parametry systému WGS84

Název	Symbol	Hodnota	Rozměr
Velká poloosa	a	6 378 137	m
Převrácená hodnota zploštění	$1/f$	298,257 223 563	
Úhlová rychlost rotace Země	ω	$7{,}292\,115 \times 10^{-5}$	rad/s
Zemská gravitační konstanta (vliv hmoty atmosféry započítán)	GM	$3{,}986\,004\,418 \times 10^{14}$	$m^3 \cdot s^{-2}$

1.1 Odvozené geometrické parametry WGS84

Základní parametry systému nestačí na všechny numerické výpočty geodetických úloh. Proto z nich odvodíme další hodnoty. Přitom se budeme řídit zásadou, že základní parametry byly stanoveny zcela přesně (to znamená, že za hodnotami uvedenými v tab. 1 následují samé nuly) a odvozené parametry z nich vypočteme na tolik desetinných míst, kolik budeme pro naše účely potřebovat. Ve světové literatuře bylo odvozeno několik postupů dalšího zpracování. My se zde přidržíme Moloděnského postupu [2, 3]. Další metody – metoda Pizzettiho, Moritze a Heiskanena, Hirvonena, Hotina a dalších – byly podrobně popsány např. v práci [4].
Čtverec prvé excentricity e^2 určíme ze vztahu

$$e^2 = 2f - f^2 , \tag{1}$$

kde

$$f = \frac{1}{(1/f)} .$$

Čtverec druhé excentricity $(e')^2$ je dán rovnicí

$$(e')^2 = \frac{e^2}{1-e^2} . \tag{2}$$

Pro čtverec lineární excentricity E^2 platí

$$E^2 = a^2 - b^2 , \tag{3}$$

kde hodnotu malé poloosy b dostaneme z výrazu

$$b = a\,(1-f). \tag{4}$$

Starší definice Pizzettiho referenčního elipsoidu používala ještě gravitační koeficient druhého stupně $\overline{C'_{2,0}}$, respektive dynamický tvarový faktor $J_2 = -\sqrt{5} \cdot \overline{C'_{2,0}}$. Pro jejich vzájemné vztahy [5] platí rovnice

$$\overline{C'_{2,0}} = -J_2 / \sqrt{5} , \tag{5}$$

$$J_2 = \frac{1}{3}\left[e^2 - \frac{2}{15}\,\frac{\omega^2 a^3 e^3}{GM\ q} \right],$$

kde

$$q = \frac{1}{2}\left[\left(1 + \frac{3}{(e')^2}\right)\arctan(e') - \frac{3}{e'}\right].$$

Tabulka 2 Odvozené parametry systému WGS84

Člen	Hodnota	Rozměr	Rovnice
f	0,003 352 810 664 747 481		
e^2	0,006 694 379 990 141 317		(1)
e	0,081 819 190 842 621 5		
$(e')^2$	0,006 739 496 742 276 435		(2)
e'	0,082 094 437 949 695 7		
E^2	272 331 606 107,554 726 970	m^2	(3)
E	521 854,008 423 385 330 012	m	
b	6 356 752,314 245 179 497 564	m	(4)
$\overline{C'_{2,0}}$	–4,841 667 749 599 43 × 10^{-4}		(5)
J_2	1,082 629 821 257 28 × 10^{-3}		(6)
q	7,334 625 786 725 72 × 10^{-5}		

2. Volba proměnného bodu

Pro numerická řešení geodetických úloh si zvolíme nějaký proměnný bod $P(\varphi, \lambda, H)$ ležící vně referenčního elipsoidu. Zeměpisné souřadnice (φ, λ) volíme v prostoru České republiky, za nadmořskou výšku H volíme hodnotu dostatečně velikou, aby se případné vlivy projevily výrazným způsobem. Nechť tedy je:

$$\varphi = 50°, \quad \lambda = 15°, \quad H = 10\,000 \text{ m}. \tag{7}$$

Pro kartézské souřadnice (x, y, z) bodu $P(\varphi, \lambda, H)$ platí

$$x = (N + H)\cos\varphi\cos\lambda, \tag{8}$$
$$y = (N + H)\cos\varphi\sin\lambda,$$
$$z = \left[N(1 - e^2) + H\right]\sin\varphi,$$

kde N je poloměr křivosti referenčního elipsoidu v prvém vertikálu:

$$N = a\Big/\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi}\,. \tag{9}$$

V teorii zemského tíhového pole se užívá eliptický souřadnicový systém.
Podle Moloděnského tedy přejdeme od kartézských souřadnic (x, y, z) k eliptickému souřadnicovému systému (u, v, w). Bude

$$x = E\sin u\,\cos v\,\cosh w, \tag{10}$$
$$y = E\sin u\,\sin v\,\cosh w,$$
$$z = E\cos u\,\sinh w.$$

Souřadnice (x, y, z) mohou být vypočteny pomocí rovnic (7) a (8). Odpovídající hodnoty (u, v, w) dostaneme pomocí rovnic (10). Předně platí

$$v = L\,.$$

K určení souřadnic u a w tak máme dvě rovnice

$$p = x\cos v + y\sin v = E\sin u\cosh w, \tag{11}$$
$$z = E\cos u\sinh w.$$

Můžeme položit

$$\sin u = d, \qquad \sinh w = f.$$

Potom bude

$$\cos u = \left(1-d^2\right)^{1/2}, \qquad \cosh w = \left(1+\sinh^2 w\right)^{1/2} = \left(1+f^2\right)^{1/2} \tag{11a}$$

Současným řešením rovnic dostaneme

$$Ed\left(1+f^2\right)^{1/2} = p, \tag{12}$$
$$Ed\left(1-d^2\right)^{1/2} f = z. \tag{13}$$

Z rovnice (13) dostáváme

$$f = \frac{z}{E\left(1-d^2\right)^{1/2}}$$

takže z rovnice (12) odvodíme[2)]

$$E^2 d^4 - \left(E^2 + z^2 + p^2\right)d^2 + p^2 = 0.$$

Dále pak[3)]

$$d^2 = \frac{1}{2E^2}\left[E^2 + z^2 + p^2 \pm \sqrt{\left(E^2 + z^2 + p^2\right)^2 - 4E^2p^2}\right], \tag{14}$$
$$u = \arcsin d, \tag{15}$$
$$f = \frac{z}{E}\left\{1 - \frac{1}{2E^2}\left[E^2 + z^2 + p^2 \pm \sqrt{\left(E^2 + z^2 + p^2\right)^2 - 4E^2p^2}\right]\right\}^{-1/2}. \tag{16}$$

Pokud platí

$$\cosh w_0 = \frac{a}{E}, \quad \sinh w_0 = \frac{b}{E}, \tag{17}$$

pak elipsoid $w = w_0$ je totožný s referenčním elipsoidem pro $H = 0$; bude tedy

$$p_0 = a\sin u_0, \quad z_0 = b\cos u_0 \tag{18}$$

a dále

$$x_0 = a\sin u_0 \cos v, \tag{19}$$
$$y_0 = a\sin u_0 \sin v,$$
$$z_0 = b\cos u_0,$$
$$E^2 + p^2 + z^2 = E^2 + a^2\sin^2 u_0 + b^2\cos^2 u_0 = a^2 + E^2\sin^2 u_0,$$
$$\left(E^2 + p^2 + z^2\right)^2 - 4E^2p^2 = \left(a^2 - E^2\sin^2 u_0\right)^2,$$

$$f = \frac{b\cos u_0}{E}\left\{1 - \frac{1}{2E^2}\left[a^2 + E^2\sin^2 u_0 \pm \sqrt{a^4 + E^4\sin^4 u_0 - 2E^2a^2\sin^2 u_0}\right]\right\}^{-1/2} = \tag{20}$$

[2)] Z rovnic (12) a (13) jsme sestavili bikvadratickou rovnici pro neznámou d a tu řešili obvyklým způsobem jako kvadratickou rovnici pro d^2.

[3)] Jiný přístup k řešení této úlohy v Pizzettiho systému nalezneme ve stati 4, rovnice (42). Numerické výsledky v tabulce 4 a v tabulce 6 jsou pochopitelně stejné.

$$= \frac{b\cos u_0}{E}\left\{1-\frac{1}{2E^2}\left[a^2+E^2\sin^2 u_0-\left(a^2-E^2\sin^2\frac{b\cos u_0}{E}u_0\right)\right]\right\}^{-1/2} =$$

$$= \frac{b\cos u_0}{E}\left\{1-\sin^2 u_0\right\}^{-1/2} = \frac{b\cos u_0}{E}\left\{\cos^2 u_0\right\}^{-1/2} = \frac{b}{E}.$$

V rovnicích (14) a (16) musíme zvolit znaménko minus.

Legendrův polynom prvého druhu druhého stupně pro $H = 0$ je

$$P_2(\cos u_0) = \frac{3}{2}\cos^2 u_0 - \frac{1}{2}. \tag{21}$$

Lamého koeficienty převádějící změny v souřadnicích (u, v, w) na změny v kartézských souřadnicích (x, y, z) budou

$$h_k^2 = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial x_i}{\partial r_k}\right)^2; \qquad r_k = u, v, w; \qquad x_i = x, y, z. \tag{22}$$

$$h_u^2 = E^2\left(\cosh^2 w - \sin^2 u\right), \tag{23}$$

$$h_v^2 = E^2 \sin^2 u \cosh^2 w,$$

$$h_w^2 = E^2\left(\cosh^2 w - \sin^2 u\right).$$

Tabulka 3 Hodnoty členů vztažených k bodu $P_0(\varphi, \lambda, H = 0)$

Člen	Hodnota	Rozměr	Rovnice
a	6 378 137	m	
b	6 356 752,314 245 18	m	(4)
e^2	0,006 694 379 990 141 32		(1)
φ	50	°	(7)
λ	15	°	(7)
N	6 390 702,044 194 69	m	(9)
H	0	m	(7)
p_0	4 107 864,091 206 780	m	(11)
u_0	0,699 785 890 896 065	rad	(18)
x_0	3 967 892,016 582 10	m	(19)
y_0	1 063 193,461 497 07	m	(19)
z_0	4 862 789,037 706 43	m	(19)
cosh w_0	12,222 071 493 269 7		(17)
sinh w_0	12,181 093 201 621 8		(17)
$P_2(\cos u_0)$	0,377 791 836 115 868		(21)
w_0	3,194 712 824 499 07		(16)
$h_{u,0}$	6 369 275,230 225 69	m	(23)
$h_{v,0}$	4 107 864,091 206 78	m	(23)

Tabulka 4 Hodnoty členů vztažených k bodu $P(\varphi, \lambda, H = 10\,000)$

Člen	Hodnota	Rozměr	Rovnice
φ	50°	°	(7)
λ	15°	°	(7)
H	10 000	m	(7)
x	3 974 100,868 112 25	m	(7)
y	1 064 857,118 250 50	m	(7)
z	4 870 449,482 137 62	m	(7)
u	0,699 785 886 832 418	rad	(15)
p	4,114 291 967 303 65	m	(11)
P_2	0,377 791 842 122 204		(26)
cosh w	12,241 196 323 636 8		(11a)
sinh w	12,200 282 268 612 4		(11a)
w	3,196 281 631 337 95		16
h_u	6 379 269,463 955 71	m	(23)
h_v	4 114 291,967 303 70	m	(23)

Tabulka 5 Výpočet normálního tíhového potenciálu a normálního tíhového zrychlení

Člen	Hodnota	Rozměr	Rovnice
m	$1{,}466\,925\,157\,416\,2 \times 10^{-4}$		(25)
$P_2(\cos u)$	0,377 791 842 122 238		(26)
W_1	62 466 779,70118 28	$m^2 \cdot s^{-2}$	(28)
W_2	27 113,34069 55859	$m^2 \cdot s^{-2}$	(29)
W_3	45 005,67068 61003	$m^2 \cdot s^{-2}$	(30)
W	62 538 898,71256 45	$m^2 \cdot s^{-2}$	(27)
h_u	6 379 269,463 955 68	m	(23)
h_v	4 114 291,967 303 65	m	(23)
$1/h_w \cdot \mathrm{d}w_1$	–9,781 240 591 396 93	$m \cdot s^{-2}$	(35)
$1/h_w \cdot \mathrm{d}w_2$	–0,012 744 590 667 492	$m \cdot s^{-2}$	(36)
$1/h_w \cdot \mathrm{d}w_3$	0,014 062 816 241 483 7	$m \cdot s^{-2}$	(37)
$1/h_w \cdot \partial W/\partial w$	–9,779 922 365 822 94	$m \cdot s^{-2}$	(38)
$\mathrm{d}u_1$	$1{,}675\,923\,559\,107\,78 \times 10^{-2}$	$m \cdot s^{-2}$	(39)
$\mathrm{d}u_2$	$-1{,}662\,850\,190\,163\,85 \times 10^{-2}$	$m \cdot s^{-2}$	(40)
$1/h_u \cdot \partial W/\partial u$	$1{,}307\,336\,894\,393\,57 \times 10^{-4}$	$m \cdot s^{-2}$	(38)
$\gamma(P)$	–9,779 922 366 696 74	$m \cdot s^{-2}$	(31)

3. Tíhový potenciál

Tíhový potenciál $W(P)$ v bodě $P(\varphi, \lambda, H)$ počítáme podle Moloděnského pomocí vzorce

$$W(P)=\frac{GM}{E}\operatorname{arc}\cot\sinh w+\frac{\omega^2a^2}{3m}\left[\left(3\sinh^2 w+1\right)\operatorname{arc}\cot\sinh w-3\sinh w\right]P_2(\cos u)+ \qquad (25)$$

$$+\frac{\omega^2}{2}E^2\sin^2 u\cosh^2 w,$$

$$m=\left(3\frac{b^2}{E^2}+1\right)\operatorname{arc}\tan\left(\frac{E}{b}\right)-3\frac{b}{E},$$

kde $P_2(\cos u)$ je Legendrův polynom prvého druhu druhého stupně (26)

$$P_2(\cos u)=\frac{3}{2}\cos^2 u-\frac{1}{2}. \qquad (26)$$

K numerickému výpočtu rovnice (24):
Hyperbolometrické funkce

$\operatorname{arc}\cot x$

nejsou na počítačích implementovány. Počítají se tedy pro $x = \sinh w$ jako

$\operatorname{arc}\tan(1/\sinh w)$.

Rovnici (24) si formálně přepíšeme do tvaru

$$W = W_1 + W_2 + W_3, \qquad (27)$$

kde

$$W_1=\frac{GM}{E}\operatorname{arc}\cot\sinh w, \qquad (28)$$

$$W_2=\frac{\omega^2a^2}{3m}\left[\left(3\sinh^2 w+1\right)\operatorname{arc}\cot\sinh w-3\sinh w\right]P_2(\cos u), \qquad (29)$$

$$W_3=\frac{\omega^2}{2}E^2\sin^2 u\cosh^2 w. \qquad (30)$$

Prvé derivace normálního tíhového potenciálu $\gamma(P)$ budeme psát takto:

$$\gamma(P)=\frac{\partial W}{h_w\partial W}+\frac{1}{2}\frac{\left(\partial W/h_u\partial u\right)^2}{\partial W/h_w\partial W}, \qquad (31)$$

kde

$$\frac{\partial W}{\partial w}=-\frac{GM}{E\cosh w}+\frac{\omega^2a^2}{3m}\left[6\sinh w\cosh w\operatorname{arc}\cot\sinh w-\frac{6\sinh^2 w+4}{\cosh w}\right]P_2(\cos u)+ \qquad (32)$$

$$+\frac{2}{3}\omega^2E^2\sinh w\cosh w\left(1-P(\cos u)\right),$$

$$\frac{\partial W}{\partial u}=\omega^2E^2\cosh^2 w\sin u\cos u-\frac{1}{2}\frac{\omega^2a^2}{m}\left[\left(3\sinh^2 w+1\right)\operatorname{arc}\cot\sinh w-3\sinh w\right]\sin(2u). \qquad (33)$$

Rovnici (32) podobně jako v předchozím přepíšeme na tvar

$$\frac{1}{h_w}\frac{\partial W}{\partial w}=\frac{1}{h_w}\mathrm{d}w_1+\frac{1}{h_w}\mathrm{d}w_2+\frac{1}{h_w}\mathrm{d}w_3, \qquad (34)$$

kde

$$\partial W_{01} = \frac{1}{h_w}\mathrm{d}w_1 = -\frac{1}{h_w}\frac{GM}{E\cosh w}, \tag{35}$$

$$\partial W_{02} = \frac{1}{h_w}\mathrm{d}w_2 = \frac{1}{h_w}\frac{\omega^2 a^2}{3m}\left[6\sinh w\cosh w \operatorname{arc\,cot}\sinh w - \frac{6\sinh^2 w + 4}{\cosh w}\right]P_2(\cos u), \tag{36}$$

$$\partial W_{03} = \frac{1}{h_w}\mathrm{d}w_3 = \frac{1}{h_w}\frac{2}{3}\omega^2 E^2 \sinh w\cosh w\,(1 - P_2(\cos u)). \tag{37}$$

Stejně upravíme i rovnici (33). Bude

$$\frac{1}{h_u}\frac{\partial W}{\partial u} = \frac{1}{h_u}\mathrm{d}u_1 + \frac{1}{h_u}\mathrm{d}u_2, \tag{38}$$

kde

$$\frac{1}{h_u}\mathrm{d}u_1 = \frac{1}{h_u}\omega^2 E^2\cosh^2 w \sin u\cos u, \tag{39}$$

$$\frac{1}{h_u}\mathrm{d}u_2 = -\frac{1}{h_u}\frac{1}{2}\frac{\omega^2 a^2}{m}\left[\left(3\sinh^2 w + 1\right)\operatorname{arc\,cot}\sinh w - 3\sinh w\right]\sin(2u). \tag{40}$$

Laméovy koeficienty h_u, h_v jsme již odvodili dříve v rovnicích (22) a (23).
Vypočetli jsme tak hodnotu tíhového potenciálu W a jeho derivaci ve směru normály γ podle rovnic (24) a (31). Numerické hodnoty příslušných členů nalezneme v tab. 5.

4. Střední integrální hodnota tíže

Hodnotu tíže určíme derivováním rovnice (24) ve směru normály k referenčnímu elipsoidu. K tomu účelu si rovnici (24) přepíšeme podle Pizzettiho do pohodlnějšího tvaru [7]. Podle Pizzettiho jsme přešli do systému ortogonálních eliptických souřadnic (s, u, v). Přitom hodnota s má vztah k nadmořským výškám, hodnota u je redukovaná šířka a v je zeměpisná délka bodu. (V Pizzettiho úpravě se místo doplňku redukované šířky u používá přímo redukovaná šířka β. Podle toho jsou upraveny rovnice z práce [7].) Souřadnice bodu P tedy v tomto systému určují vztahy

$$x = a'\cos u\,\cos\lambda, \tag{41}$$
$$y = a'\cos u\,\sin\lambda,$$
$$x = b'\sin u;$$

u je doplněk redukované šířky. Její hodnotu určíme z rovnic (41):

$$\cos u = r/a', \qquad \sin u = z/b', \tag{42}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Dále pak vypočteme pomocnou veličinu Q, pro níž platí

$$Q = \sin^2 u/(b')^2 + \cos^2 u/(a')^2; \tag{43}$$

pro Laméovy koeficienty dostáváme

$$h_s^2 = \sum_{k=1}^{3}\left(\partial x_k/\partial s\right)^2$$

a podobně pro hodnoty h_u a h_λ; tyto koeficienty jsou definovány v takto stanoveném systému rovnicemi

$$h_s = \sqrt{Q}/2, \qquad h_u = a'b'/\sqrt{Q}, \qquad h_\lambda = a'\cos u. \tag{44}$$

Tíhový potenciál W bude v Pizzettiho pojetí popsán rovnicí

$$W(P) = (\alpha+\beta)A - \alpha\left[\left(B - B_0 - \frac{(b')^2}{(a')^2}C + \frac{b^2}{a^2}C_0\right)r^2 + (b')^2 C\right] \tag{45}$$

čili symbolicky

$$W = W_a + W_b. \tag{46}$$

Konstanty α a β určují vztahy

$$\alpha = \frac{\omega^2}{2\left[B_0 - \left(b^2/a^2\right)C_0\right]}, \tag{47}$$

$$\beta = GM/2 - \frac{2}{3}\alpha, \tag{48}$$

hodnoty eliptických integrálů A, B, C a B_0, C_0 jsou

$$A = 2/E \arctan(E/b'), \tag{49}$$

$$B = 1/E^3\left[\arctan(E/b') - b'E/(a')^2\right],$$

$$C = 2/E^3\left[E/b' - \arctan(E/b')\right],$$

$$B_0 = 1/E^3\left[\arctan(E/b) - bE/a^2\right],$$

$$C_0 = 2/E^3\left[E/b - \arctan(E/b)\right].$$

Rovnici (45) budeme derivovat ve směru normály. Bude

$$\gamma(P) = \sqrt{\left[\left(\frac{\partial W(P)}{h_s\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial W(P)}{h_u\partial u}\right)^2\right]} \approx \frac{\partial W(P)}{h_s\partial s} + \frac{1}{2}\frac{\left[\partial W(P)/h_u\partial u\right]^2}{\left[\partial W(P)/h_s\partial s\right]} = \tag{50}$$

$$= (g_1 + g_2) + \frac{g_3^2}{2(g_1+g_2)}.$$

Hlavní člen rovnice (50) pišme ve tvaru

$$\frac{\partial W(P)}{h_s\partial s} = -\frac{2\alpha}{\sqrt{Q}}\left[(B-B_0)\sin^2 u + C - \left(C - \frac{b^2}{a^2}C_0\right)\sin^2 u\right] - \frac{2\beta}{(a')^2 b'\sqrt{Q}} = g_1 + g_2. \tag{51}$$

Opravný člen

$$\frac{1}{h_u}\frac{\partial W(P)}{\partial u} = \frac{\alpha\, a'\sin(2u)}{b'\sqrt{Q}}\left[B - B_0 - \frac{(b')^2}{(a')^2}C + \frac{b^2}{a^2}C_0\right] = g_3 \tag{52}$$

můžeme zpravidla zanedbat.

Po dosazení vztahů (51) a (52) do rovnice (50) dostaneme řadu (viz [7])

$$\gamma = \gamma_0 + \frac{\partial\gamma}{\partial H}H + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2\gamma}{\partial H^2}H^2 + \frac{1}{3!}\frac{\partial^3\gamma}{\partial H^3}H^3 + \ldots, \tag{53}$$

kde

$$\frac{\partial^i \gamma}{\partial H^i} = \sum_{k=0}^{n} \gamma_{ik} \sin^{2k} \varphi \,. \tag{54}$$

Platí tedy

$$\gamma(P) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{i!} \gamma_{ik} \sin^{2k} \varphi \, H^i \;. \tag{55}$$

Tabulka 6 Výpočet normální tíže a tíhového potenciálu podle Pizzettiho

Veličina	Hodnota	Rozměr	Rovnice
x	3 974 100,86811 225	m	(41)
y	1 064 857,118 250 50	m	(41)
z	4 870 449,482 137 62	m	(41)
u	0,699 785 886 832 394	rad	(42)
$\sqrt{Q}$	$1{,}567\ 586\ 143\ 277\ 59 \times 10^{-7}$	1/m	(43)
h_s	$7{,}837\ 930\ 716\ 387\ 93 \times 10^{-8}$	1/m	(44)
h_u	$6{,}375\ 631\ 462\ 8\ 649\ 99 \times 10^{6}$	m	(44)
A	$3{,}134\ 305\ 592\ 793\ 39 \times 10^{-7}$	1/m	(49)
B	$2{,}562\ 487\ 781\ 915\ 081 \times 10^{-21}$	$1/m^3$	(49)
C	$2{,}572\ 801\ 326\ 744\ 29 \times 10^{-21}$	$1/m^3$	(49)
B_0	$2{,}574\ 552\ 016\ 517\ 441 \times 10^{-21}$	$1/m^3$	(49)
C_0	$2{,}584\ 946\ 740\ 466\ 87 \times 10^{-21}$	$1/m^3$	(49)
α	$3{,}847\ 740\ 516\ 322\ 59 \times 10^{14}$	$m^3 \cdot s^{-2}$	(47)
β	$-5{,}721\ 581\ 352\ 150\ 63 \times 10^{13}$	$m^3 \cdot s^{-2}$	(48)
W_a	$1{,}026\ 667\ 617\ 676\ 08 \times 10^{8}$	$m^2 \cdot s^{-2}$	(46)
W_b	$-4{,}012\ 786\ 305\ 504\ 38 \times 10^{7}$	$m^2 \cdot s^{-2}$	(46)
W	$62\ 538\ 898{,}712\ 564\ 5 \times 10^{7}$	$m^2 \cdot s^{-2}$	(46)
g_1	–12,587 955 568 823 00	Gal	(51)
g_2	–2,808 033 203 207 85	Gal	(51)
g_3	$-1{,}307\ 336\ 888\ 756\ 26 \times 10^{-4}$	Gal	(52)
γ	–9,779 922 366 488 95	Gal	(50)
$\overline{\gamma_1}$	–9,795 300 201	Gal	(57)
$\overline{\gamma_2}$	–9,795 300 200	Gal	(59)

Tabulka 7 Koeficienty pro výpočet normální tíže

Veličina	Hodnota	Rozměr	Rovnice
$\overline{\gamma_1}$	–9,795 300 201	Gal	(57)
$\overline{\gamma_2}$	–9,795 300 200	Gal	(59)
	$\gamma_i = \sum_{k=0}^{n} \gamma_{ik} s^{2k}$		
	γ_{ik}		
γ_{00}	–9,780 325 335 904 35	Gal	
γ_{01}	$-5{,}163\,075\,455\,383\,57 \times 10^{-2}$	Gal	
γ_{02}	$-2{,}276\,057\,669\,809\,35 \times 10^{-4}$	Gal	
γ_{03}	$-1{,}234\,452\,243\,746\,80 \times 10^{-6}$	Gal	
γ_{04}	$-7{,}142\,337\,529\,334\,84 \times 10^{-9}$	Gal	
γ_{05}	$-4{,}273\,571\,430\,046\,34 \times 10^{-11}$	Gal	
γ_{10}	$+3{,}087\,797\,667\,955\,72 \times 10^{-6}$	Gal	
γ_{11}	$-4{,}389\,814\,582\,641\,21 \times 10^{-9}$	Gal	
γ_{12}	$-1{,}996\,461\,429\,512\,17 \times 10^{-11}$	Gal	
γ_{20}	$-1{,}453\,020\,440\,000\,93 \times 10^{-12}$	Gal	
γ_{21}	$+4{,}169\,780\,215\,544\,13 \times 10^{-15}$	Gal	
γ_{22}	$-4{,}451\,780\,050\,772\,71 \times 10^{-18}$	Gal	
γ_{23}	$+4{,}348\,326\,414\,933\,23 \times 10^{-22}$	Gal	
γ_{30}	$+9{,}137\,321\,067\,104\,82 \times 10^{-19}$	Gal	
γ_{31}	$-7{,}353\,341\,192\,392\,60 \times 10^{-21}$	Gal	
γ_{32}	$+2{,}254\,385\,010\,612\,00 \times 10^{-22}$	Gal	
γ_{40}	$+7{,}266\,147\,249\,993\,77 \times 10^{-31}$	Gal	
γ_{41}	$+6{,}656\,330\,261\,525\,00 \times 10^{-33}$	Gal	
	γ_i pro $\varphi = 50°$		
γ_0	–9,810 702 135 603 01	Gal	
γ_1	$+3{,}085\,214\,743\,948\,40 \times 10^{-6}$	Gal	
$\frac{1}{2}\gamma_2$	$-7{,}252\,875\,227\,318\,00 \times 10^{-13}$	Gal	
$\frac{1}{6}\gamma_3$	$+1{,}515\,824\,369\,222\,86 \times 10^{-19}$	Gal	
$\frac{1}{24}\gamma_4$	$+3{,}043\,836\,749\,750\,29 \times 10^{-32}$	Gal	

Hodnoty koeficientů $\gamma_{ik} = \dfrac{\partial^i \gamma}{\partial H^i}$ řady (55) i jejich částečné součty $\sum\limits_i \dfrac{1}{i!}\dfrac{\partial^i \gamma}{\partial H^i}\sin^{2k}\varphi$ pro zeměpisnou šířku $\varphi = 50°$ nalezneme v tab. 7. Jako příklad výpočtu normálního tíhového zrychlení γ pro známou výšku $H = 10\,000$ m a zeměpisnou šířku $\varphi = 50°$ podle rovnice (53) uvádíme

$$\varphi = 50°, \quad H = 10\,000 \text{ m}, \quad \gamma = 9{,}779\,922\,366\,488\,95 \text{ Gal}.$$

Střední integrální hodnotu tíže[4)] počítanou pro spojnici $\overline{P_0P}$ bodů $P_0(H = 0)$ a $P(H)$, ležící na téže normále k referenčnímu elipsoidu

$$\gamma_{\overline{P_0P}} = \frac{1}{H}\int_{H=0}^{H} \gamma \,\mathrm{d}H \tag{56}$$

jsme určovali dvojím způsobem:

Jednak přímo podle rovnice (56). Vzdálenost $\overline{P_0P} = 10\,000$ m jsme rozdělili na $n = 100$ dílků. Pak podle lichoběžníkové metody vyčíslení integrálu ([6], str. 336) jsme dostali

$$\bar{\gamma} = \frac{1}{2n}\left\{2\sum_{n=1}^{99}\gamma_n + \gamma_0 + \gamma_{100}\right\}\Delta h\,; \tag{57}$$

$\Delta h = 100$ m, hodnotu γ_i pro výšku H_i jsme pak počítali podle rovnice (50). Dostali jsme $\bar{\gamma}_1 = -9{,}795\,300\,201$ Gal. Podle druhé metody jsme přímo integrovali rovnici (51):

$$\bar{\gamma} = \frac{1}{H}\int_{H=0}^{H}\left(\sum_{i=0}^{4}\gamma \,\mathrm{d}H^i\right)\mathrm{d}h \tag{58}$$

Z výsledku

$$\bar{\gamma} = \sum_{i=0}^{4}\frac{1}{n!}\gamma_i H^i \tag{59}$$

vyplynulo, že $\bar{\gamma}_2 = -9{,}795\,300\,200$ Gal. (60)

Závěr

Práce pojednává o numerických výpočtech v geodetických systémech typu WGS84. Konkrétně byly použity základní parametry tohoto systému a z nich odvozeny vedlejší parametry. Další výpočty byly provedeny pro zvolený bod $P(\varphi = 50°, \lambda = 15°, H = 10\,000$ m). K ověření výsledků je třeba mít počítač se systémem Windows verze 98 nebo vyšší a s odpovídající verzí programu Excel.

[4)] Numerická hodnota tíže (síly) a tíhového zrychlení je při námi dané volbě jednotek stejná, liší se jen rozměrem, síla se měří v jednotkách $\mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-2}}$, zrychlení v jednotkách $\mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

Literatura

[1] PIZZETTI, P.: *Principii della teoria meccanica della figura dei pianeti.* Pisa : Enrico Spoerri, 1913.

[2] JEREMEJEV, V. F. a JURKINA, M. I.: *Teorija vysot v gravitacionnom pole Zemli.* Moskva : CNIIGAiK, GIGiK, Nedra, 1972. Něm. překlad: Theorie der Hőhen in Gravitationsfeld der Erde. *Arbeiten aus dem Vermessungs- und Kartenwesen der DDR*, **32**, 1974, S. 284.

[3] MOLODĚNSKIJ, M. S., JEREMEJEV, V. F. a JURKINA, M. I.: Metody izučenija vnešnego gravitacionnogo polja i figury Zemli. *Trudy CNIIGAiK*, vyp. **131**, 1960, s. 3–250. (Moskva : Geodezizdat).

[4] JURKINA, M. I. a PICK, M.: K přechodu na nový světový geodetický systém WGS84. *Geodetický a kartografický obzor*, **50**/**92**, 2004, č. 3, s. 41–45.

[5] MORITZ, H.: Geodetic reference system 1967. *Publication spécialle du Bulletin Géodésique*, UGGI, AIG, 1967.
Viz též: The Geodetic Reference System 1967. *Allgemeine Vermessungs-Nachrichten*, **75**, 1968, no 1, S. 2–7.

[6] BRONŠTEJN, I. N. a SEMENDJAJEV, K. A.: *Spravočnik po matematike dlja inženerov i učaščichsja vtuzov.* 8. izd. Moskva : Gos. izd. fiziko-matemat. lit., 1959. 608 s.
Něm. překlad: *Taschenbuch der Mathematik.* 17. Aufl. Leipzig : Teubner, 1977.

[7] PICK, M.: On the Normal Gravity Formulae. *Studia geophysica et geodaetica*, **34**, 1990, no. 4, p. 289–312.

ABSTRACT

The presented paper deals with the numerical calculations in the geodetic systems of such a type as WGS84.As a concrete case, the numerical values of the basic parameters of system WGS84 were used. The following analysis was carried out for the chosen point $P(\varphi = 50°,\ \lambda = 15°,\ H = 10\ 000\ \mathrm{m})$. The results can be proved on the computer with WINDOWS 98 or better and according to the program EXCEL.